

CAPÍTULO I - ELEMENTOS DE PROBABILIDADE

1.1 INTRODUÇÃO

Em geral, um experimento ao ser observado e repetido sob um mesmo conjunto especificado de condições, conduz invariavelmente ao mesmo resultado. São os experimentos chamados de determinísticos. Entretanto, existem experimentos em que não se obtêm sempre o mesmo resultado, ainda que realizado sob condições idênticas. Tais experimentos, por apresentarem variabilidade nos resultados, são objeto da Teoria de Probabilidade, a qual será introduzida aqui.

1.2 CONCEITOS BÁSICOS

1.2.1 EXPERIMENTO ALEATÓRIO

Um experimento é dito aleatório quando o seu resultado não for previsível no sentido comum antes de sua realização, ou seja, é um experimento cujos resultados estão sujeitos unicamente ao acaso.

Os seguintes traços são pertinentes a esta caracterização de experimento aleatório :

- Cada experimento poderá ser repetido indefinidamente sob condições essencialmente inalteradas.
- Embora o resultado preciso que ocorrerá não possa ser dado, um conjunto que descreva todos os resultados possíveis para o experimento poderá ser apresentado.
- Quando o experimento for executado repetidamente, os resultados individuais parecerão ocorrer de uma forma acidental. Contudo, quando o experimento for repetido um grande número de vezes, uma configuração definida ou regularidade surgirá. É esta regularidade que torna possível construir um modelo matemático preciso através do qual se analisará o experimento.

EXEMPLOS

(1) Jogue um dado comum e observe o número mostrado na face voltada para cima.

- (2) Jogue uma moeda quatro vezes e observe o número de caras obtido.
- (3) Uma lâmpada é fabricada e em seguida ensaiada. Observe a sua duração de vida.
- (4) Observe o tempo de espera de uma pessoa numa fila de ônibus.
- (5) Peças são fabricadas até que 10 peças perfeitas sejam produzidas. O número total de peças é observado.

1.2.2 ESPAÇO AMOSTRAL (S)

É o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. O espaço amostral depende essencialmente do que se queira observar no experimento aleatório. Por exemplo, podemos jogar duas moedas e observar o número de caras que ocorre ou podemos observar a distância entre elas na superfície em que caíram.

EXEMPLOS

Considere os experimentos aleatórios descritos no item 1.2.1. Definiremos os espaços amostrais para cada exemplo dado.

- (1) $S_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
- (2) $S_2 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$
- (3) $S_3 = \{ t \in \mathbb{R} / t \geq 0 \}$
- (4) $S_4 = \{ t \in \mathbb{R} / t \geq 0 \}$
- (5) $S_5 = \{ 10, 11, 12, \dots \}$

OBSERVAÇÃO :

Um espaço amostral pode ser :

Finito:

Se tem um número finito de elementos. Exemplos (1) e (2) acima.

Infinito Enumerável:

Se tem tantos elementos quanto o conjunto dos números Naturais.

Exemplo (5) acima.

Infinito Não-enumerável:

Se tem tantos elementos quanto um determinado segmento do eixo Ox, tal como $0 \leq x \leq 1$. Exemplos (3) e (4) acima.

1.2.3 EVENTO

É qualquer subconjunto de um espaço amostral. Dizemos que o evento E ocorre se qualquer um dos resultados de E ocorre.

Um evento que contenha apenas um elemento, isto é, um conjunto que consiste de um único resultado do experimento é dito evento simples ou elementar.

Em particular, dizemos que um evento E é impossível se $E = \emptyset$ e que o próprio espaço amostral S é o evento certeza.

EXEMPLO 1:

Considere a jogada de um dado e observe o número da face voltada para cima . O espaço amostral é :

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

O evento “ número par” é o conjunto :

$$A = \{ 2, 4, 6 \}$$

O evento “ número maior que 4” é o conjunto :

$$B = \{ 5, 6 \}$$

Ainda neste exemplo, se o dado é lançado e ocorre a face número 5, então podemos dizer que o evento B ocorreu e que o evento A não ocorreu.

EXEMPLO 2

Em uma linha de produção, peças são fabricadas em série e o número de peças defeituosas produzidas por um período de 24 horas é observado. O espaço amostral é :

$$S = \{0, 1, 2, \dots, N\} \text{ onde } N \text{ é o número máximo que pode ser produzido em 24 horas.}$$

O evento “ todas as peças são perfeitas ” é o conjunto :

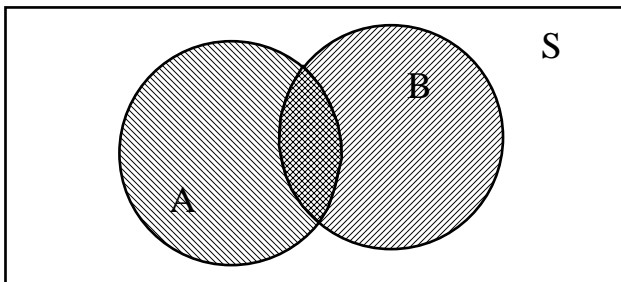
$A = \{ 0 \}$. Assim, se num determinado período de 24 horas observamos que não ocorreu peças defeituosas, podemos dizer que o evento A ocorreu.

1.2.3.1 Operações Com Eventos

Como o espaço amostral S e qualquer evento de S são conjuntos, todas as operações entre conjuntos podem ser aqui aplicadas. Assim, se A e B são dois eventos de S , então :

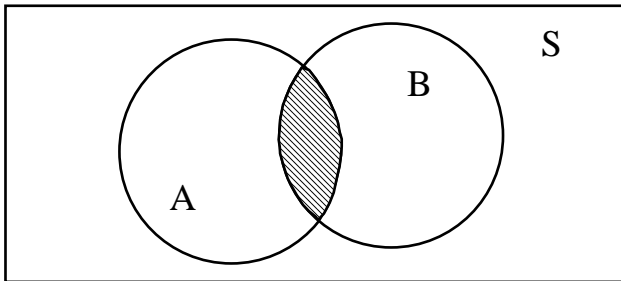
a) Evento União : $A \cup B$

O evento $A \cup B$ ocorre quando ocorre o evento A ou ocorre o evento B ou ocorrem ambos os eventos A e B .



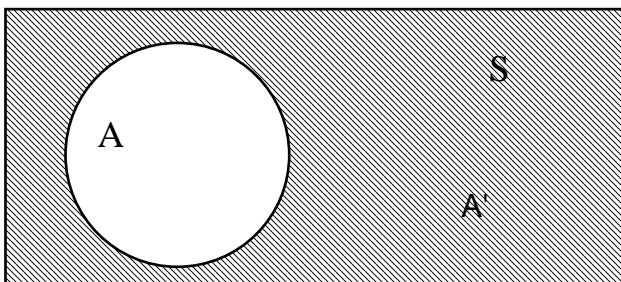
b) Evento Interseção : $A \cap B$

O evento $A \cap B$ ocorre quando ambos os eventos A e B ocorrem.



c) Evento Complementar : A , A' ou A^c

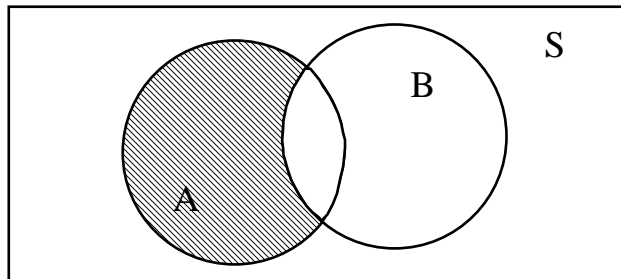
O evento A' ocorre quando o evento A não ocorre.



d) Evento Diferença : $A - B$

O evento $A - B$ ocorre quando ocorre o evento A mas não ocorre o evento B .

OBS.: Note que $A - B \neq B - A$.



EXEMPLO :

Sejam A , B e C eventos quaisquer de S . Usando as operações de união, interseção e complementar, podemos descrever alguns eventos tais como :

(i) Ocorrência de A e não ocorrência de B e C :

$$A \cap B' \cap C'$$

(ii) Ocorrência de pelo menos um destes eventos :

$$A \cup B \cup C$$

(iii) Ocorrência de exatamente um destes eventos :

$$(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$$

(iv) Ocorrência de nenhum destes eventos :

$$A' \cap B' \cap C'$$

(v) Ocorrência de exatamente dois destes eventos :

$$(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$$

1.2.3.2 Algumas Propriedades Operatórias

- Comutativas:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- Associativas:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B = A \cup B \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap B = A \cap B \cap C$$

- Distributivas:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Leis de De Morgan

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

- $A \cup A' = S$

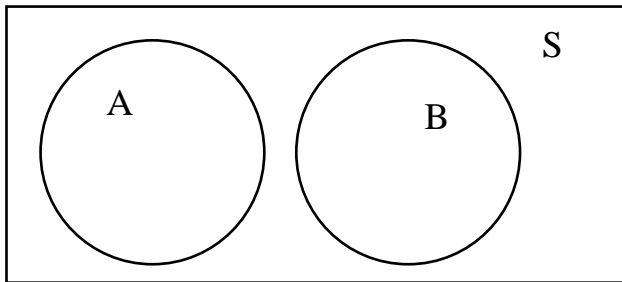
$$A \cap A' = \phi$$

$$(A')' = A$$

Se $A \subset B$ então $A \cap B = A$ e $A \cup B = B$

1.2.3.3 Eventos Mutuamente Exclusivos

Dois eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos (excludentes ou disjuntos) quando não podem ocorrer simultaneamente. Isto é, se a interseção deles for o conjunto vazio .



$$A \cap B = \phi$$

EXEMPLO 1

Uma moeda honesta é lançada e observa-se o resultado que ocorre. Denotemos por H : cara e T : coroa . O espaço amostral associado a este experimento é : $S = \{ H, T \}$.

Considere os eventos: A : “ocorre cara” e B : “ocorre coroa”

Como em cada lançamento só ocorre cara ou só coroa , $A \cap B = \phi$, e portanto A e B são eventos mutuamente exclusivos.

EXEMPLO 2

Uma urna contém 4 bolas brancas, 6 bolas pretas e 5 bolas azuis. O experimento consiste em retirar duas bolas com reposição da primeira e observar a cor delas. Considere os seguintes eventos :

A : “ a primeira bola retirada é branca ”

B : “ a segunda bola retirada é preta ”.

Como A e B são dois eventos que podem ocorrer juntos (é possível a primeira bola ser branca e a segunda preta), isto é, $A \cap B \neq \emptyset$, então A e B não são eventos mutuamente exclusivos.

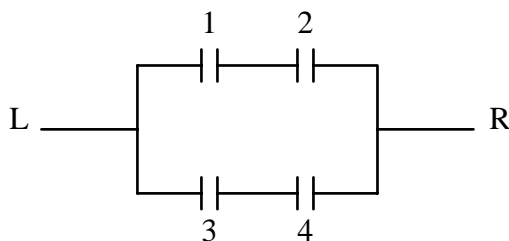
EXEMPLO 3

No circuito abaixo pode ou não passar corrente de L para R, dependendo do fechamento dos relês 1, 2, 3 e 4. Supondo que estes relês fechem aleatoriamente, considere os seguintes eventos :

A : “ fecham os relês 1 e 2 ”

B : “ fecham os relês 3 e 4 ”.

Como os relês podem fechar juntos, $A \cap B \neq \emptyset$. Portanto, A e B não são eventos mutuamente exclusivos.



EXEMPLO 4:

Uma lâmpada é fabricada e sua duração de vida é observada. Considere os eventos:

A: a lâmpada dura mais do que 300 horas

B: a lâmpada dura no máximo 200 horas

C: a lâmpada dura pelo menos 100 horas

Os eventos A e B são mutuamente exclusivos ; os eventos A e C não são mutuamente exclusivos e os eventos B e C também não são mutuamente exclusivos.

1.3 PROBABILIDADE

1.3.1 ENFOQUE ESTATÍSTICO

Se repetirmos um experimento aleatório n vezes, em certo número m de vezes ocorrerá o evento E ; m é a frequência com que ocorre o evento E e m/n é a frequência relativa de ocorrência de E .

Chamamos de probabilidade do evento E , $P(E)$, ao valor limite da frequência relativa m/n para uma seqüência muito grande de realizações do experimento ($n \rightarrow \infty$). Ou seja:

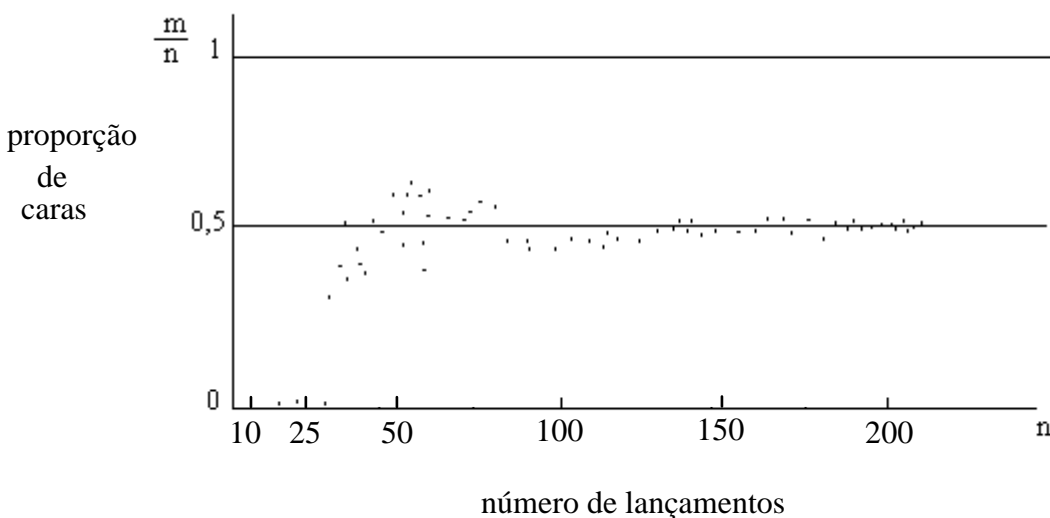
$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

EXEMPLO

Considere o experimento aleatório de jogar uma moeda honesta e observar o resultado que ocorre. O espaço amostral é: $S = \{ H, T \}$.

Seja o evento $E = \{ H \}$.

À medida que forem realizados os lançamentos da moeda, notamos que a proporção (frequência relativa) de caras se aproxima de $1/2$. O gráfico abaixo ilustra esta situação apresentando a tendência da frequência relativa em se aproximar do valor $1/2$, à medida em que o número de lançamentos cresce.



1.3.2 ENFOQUE CLÁSSICO

Seja ε um experimento aleatório e S um espaço amostral associado a ε . Suponha que S seja finito e que todos os resultados de S sejam igualmente prováveis. Considere um evento A de S , isto é $A \subset S$. Então, se n_S e n_A são, respectivamente, o número de elementos de S e o número de elementos de A , a probabilidade de ocorrência do evento A , $P(A)$, é o número real definido por:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_S}$$

OBS.:

1) Dizemos que o espaço amostral $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ é equiprovável quando qualquer elemento s_i de S tem a mesma chance de ocorrência quando o experimento é realizado.

2) Note que pela definição clássica a probabilidade de ocorrência de um evento A é um número entre 0 e 1, inclusive. A razão n_A/n_S deve ser menor ou igual a 1 uma vez que o número total de resultados possíveis não pode ser menor do que o número de resultados de um evento. Se um evento ocorre com certeza (S) então sua probabilidade é 1; se é certeza que ele não ocorre (ϕ) então sua probabilidade é 0.

EXEMPLO 1

Qual a probabilidade de sair “cara” na jogada de uma moeda ?

O espaço amostral é $S = \{ H, T \}$, $n_S = 2$.

Defina o evento $A = \{ H \}$, $n_A = 1$.

$$\text{Daí : } P(A) = \frac{n_A}{n_S} = \frac{1}{2}$$

EXEMPLO 2

Qual a probabilidade de sair soma 5 na jogada de dois dados honestos?

Note que se for considerado o espaço amostral $S = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ para descrever os resultados possíveis em termos de soma, teremos um espaço amostral que não é equiprovável. A soma 2, por exemplo, não tem a mesma chance de ocorrer do que a soma 7.

O espaço amostral equiprovável a ser considerado é:

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \dots, (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}$$

$$n_S = 36.$$

Defina o evento $A = \{ \text{Soma } 5 \} = \{ (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) \}$.

$$\text{Daí : } P(A) = \frac{n_A}{n_S} = \frac{4}{36}$$

Ainda sobre o lançamento destes dois dados, podemos expressar os resultados de seguinte maneira :

		1º DADO					
		1	2	3	4	5	6
2º DADO	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

1.3.3 ENFOQUE AXIOMÁTICO

Seja ε um experimento aleatório e S um espaço associado a ε . A cada evento A e S associamos um número real $P(A)$ denominado probabilidade de A , que obedeça aos seguintes axiomas :

A1) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo A .

A2) $P(S) = 1$.

A3) Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

A4) Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ é uma seqüência de eventos mutuamente exclusivos, então $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Podemos enunciar, a partir daí, alguns teoremas importantes.

Teorema 1 : $P(\phi) = 0$

De fato:

Para um evento qualquer A , temos que $A = A \cup \phi$ e $A \cap \phi = \phi$. Pelo axioma A3, $P(A) = P(A \cup \phi) = P(A) + P(\phi)$. Portanto $P(\phi) = 0$.

Teorema 2 : $P(A) = 1 - P(A')$

De fato:

$A \cup A' = S$ e $A \cap A' = \phi$. Pelo axioma A3: $P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A') = 1$.
Portanto $P(A) = 1 - P(A')$.

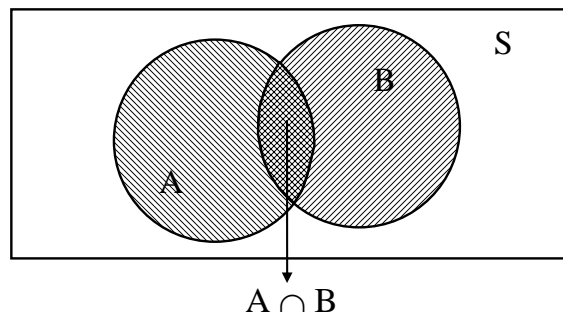
Teorema 3 : Se A e B forem dois eventos quaisquer, então :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

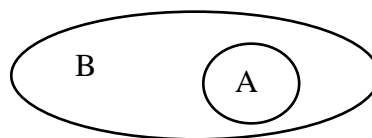
De fato:

Temos que $A \cup B = A \cup (A' \cap B)$ e que $B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$. Logo, pelo axioma A3, $P(A \cup B) = P(A) + P(A' \cap B)$. Mas $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$. Daí $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$. Levando $P(A' \cap B)$ na equação acima, vem: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Note que uma demonstração informal pode ser vista através de um diagrama de Venn como este abaixo :



Teorema 4 : Sejam A e B dois eventos quaisquer. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.



De fato:

Podemos decompor B em dois eventos mutuamente exclusivos da seguinte forma: $B = A \cup (B \cap A')$. Como $A \cap (B \cap A') = \phi$, A e $B \cap A'$ são mutuamente exclusivos. Pelo axioma A3: $P(B) = P[A \cup (B \cap A')] = P(A) + P(B \cap A') \geq P(A)$. (Já que $P(B \cap A') \geq 0$).

OBSERVAÇÕES :

- 1) Note que no teorema 3, se A e B forem mutuamente exclusivos, então : $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$ e daí vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2) Ainda sobre o teorema 3, temos o seguinte corolário :

Para quaisquer eventos A, B e C :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

3) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

EXEMPLO 1

No lançamento de um dado, qual a probabilidade de aparecer a face 2 ou a face 5?

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$P(1) = P(2) = \dots = P(6) = 1/6$. Os eventos “face 2” e “face 5” são mutuamente exclusivos. Portanto pelo axioma A3 :

$$P(2 \text{ ou } 5) = P(2 \cup 5) = P(2) + P(5) = 1/6 + 1/6 = 1/3$$

EXEMPLO 2

Sejam A e B dois eventos tais que $P(A) = 0,4$ e $P(A \cup B) = 0,7$. Seja $P(B) = p$. Para que valor de p, A e B serão mutuamente exclusivos ?

Se A e B forem mutuamente exclusivos, então :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$0,7 = 0,4 + p .$$

$$\text{Daí, } p = 0,3.$$

EXEMPLO 3

Retira-se uma carta de um baralho comum de 52 cartas. Qual a probabilidade desta carta ser um rei ou uma carta de ouros ?

O espaço amostral S é o conjunto de todas as cartas : $n_S = 52$.

Sejam os eventos: A : “rei”, $n_A = 4$

B : “carta de ouros”, $n_B = 13$

O evento interseção de A com B é $A \cap B$: “rei de ouros”, $n_{A \cap B} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Daí, pelo teorema 3, } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52 . \end{aligned}$$

EXEMPLO 4

Três cavalos A, B, C estão numa corrida; A é duas vezes mais provável de ganhar que B e B é duas vezes mais do que C. Supondo que não haja empate, quais as probabilidades de vitória de cada um, isto é, P(A), P(B) e P(C) ?

Seja $P(C) = p$. Então $P(B) = 2 P(C) = 2p$ e $P(A) = 2 P(B) = 4p$.

Como a soma as probabilidades tem que ser igual a 1, temos :

$$p + 2p + 4p = 1 \quad \text{ou} \quad p = 1/7$$

Daí, $P(A) = 4/7$, $P(B) = 2/7$ e $P(C) = 1/7$

Ainda neste exemplo, qual seria a probabilidade de B ou C ganhar ?

$$B \cap C = \phi, \text{ então } P(B \cup C) = P(B) + P(C) = 2/7 + 1/7 = 3/7$$

EXEMPLO 5

Suponha-se que há três revistas A, B e C com as seguintes porcentagens de leitura : A : 9,8 % , B : 22,9 % , C : 12,1 % , A e B : 5,1 % , A e C : 3,7 % , B e C : 6,0 % , A, B e C : 2,4 % . A probabilidade de que uma pessoa escolhida ao acaso seja leitor de pelo menos uma revista é :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \\ &= 0,098 + 0,229 + 0,121 - 0,051 - 0,037 - 0,06 + 0,024 = 0,324 \text{ ou } 32,4 \% . \end{aligned}$$

1.3.4 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Muitas vezes, o fato de ficarmos sabendo que certo evento ocorreu faz com que se modifique a probabilidade que atribuímos a outro evento. Por exemplo, a probabilidade de tirar o número 2 no lançamento de um dado é reforçada quando se sabe que um número par saiu.

Assim, sendo A e B eventos, define-se a probabilidade condicionada do evento A dado que B ocorreu (ou a probabilidade de A sabendo-se que B ocorreu) por $P(A | B)$.

1.3.4.1 Teorema do Produto

Sejam dois eventos A e B, com $P(A) > 0$. A probabilidade de A e B ocorrerem simultaneamente é igual ao produto da probabilidade de um dos eventos pela probabilidade condicionada do outro, isto é :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

$$\text{ou } P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$$

Daí, temos :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{ou} \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

OBSERVAÇÃO :

No caso de n eventos A_1, A_2, \dots, A_n , temos :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

1.3.5 EVENTOS INDEPENDENTES

Se a ocorrência do evento A não modificar a probabilidade de ocorrência do evento B, dizemos que A e B são eventos independentes.

Assim, se A e B são eventos independentes, $P(A | B) = P(A)$ e no teorema do produto temos :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Reciprocamente, se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, A e B são ditos independentes

OBSERVAÇÕES :

1) Em geral, n eventos A_1, A_2, \dots, A_n são independentes se : $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$.

2) $P(A/B) + P(A'/B) = 1$.

3) Se A e B são eventos independentes então :

A e B também são independentes e

A' e B também são independentes.

EXEMPLO 1

Lançando-se uma moeda e um dado, qual a probabilidade de sair “cara” na moeda e “5” no dado ?

Sejam os eventos: H : “cara na moeda” e C : “5 no dado”

H e C são dois eventos independentes.

Então: $P(H \cap C) = P(H) \cdot P(C) = (1/2) \cdot (1/6) = 1/12$

EXEMPLO 2

Lançam-se três moedas honestas. Encontre a probabilidade p de ocorrer cara em todas elas, se ocorre cara na primeira.

O espaço amostral S (equiprovável) é :

$S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$.

Se ocorre cara na primeira, então ocorre algum dos resultados :

HHH, HHT, HTH, HTT .

Como ocorrem 3 caras em apenas um dos resultados, $p = 1/4$.

EXEMPLO 3

Extraem-se aleatoriamente duas cartas de um baralho comum de 52 cartas. Determine a probabilidade de serem ambas ases, considerando que a primeira carta :

(a) é recolocada antes da extração da segunda carta

(b) não é recolocada antes da extração da segunda carta.

Sejam os eventos : A_1 : “às na primeira extração”

A_2 : “às na segunda extração”.

(a) Como na primeira extração há 4 ases em 52 cartas, $P(A_1) = 4/52$.

Se a carta é recolocada antes da 2^o extração, então A_1 e A_2 são independentes e:

$P(A_2 | A_1) = P(A_2) = 4/52$.

Logo , $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = (4/52) \cdot (4/52) = 1/169$.

(b) Se ocorre um às na primeira extração e a carta não é recolocada, teremos agora apenas 3 ases em 51 cartas, isto é , $P(A_2 | A_1) = 3/51$.

Logo , $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = (4/52) \cdot (3/51) = 1/221$.

EXEMPLO 4

Qual a probabilidade de aparecer 4 ao menos um vez em duas jogadas de um dado comum ?

Sejam os eventos : A_1 : “4 na primeira jogada”

A_2 : “4 na segunda jogada”.

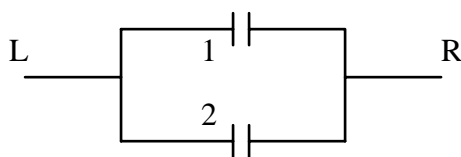
O evento $A_1 \cup A_2$ é “4 na primeira jogada ou 4 na segunda jogada ou 4 em ambas”. Os eventos A_1 e A_2 não são mutuamente exclusivos, mas são independentes. Portanto :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = \\ &= 1/6 + 1/6 - (1/6)(1/6) = 11/36. \end{aligned}$$

EXEMPLO 5

Considere o circuito abaixo onde cada relé fecha independentemente um do outro com uma probabilidade $p > 0$.

- (a) Qual a probabilidade de haver corrente de L para R ?
- (b) Se há corrente de L para R, qual a probabilidade de que o relé 1 esteja fechado?
- (c) Se há corrente de L para R, qual a probabilidade de que ambos os relés 1 e 2 estejam fechados ?



Sejam os eventos : A_1 : “o relé 1 está fechado”
 A_2 : “o relé 2 está fechado”.

$$\begin{aligned} (a) \quad P(\text{passar corrente de L para R}) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = p + p - p^2 = 2p - p^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad P(\text{relé 1 fechado} \mid \text{passa corrente de L para R}) &= P(A_1 \mid A_1 \cup A_2) = \\ &= \frac{P[A_1 \cap (A_1 \cup A_2)]}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{p}{2p - p^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad P(\text{ambos os relés fechados} \mid \text{passa corrente de L para R}) &= P(A_1 \cap A_2 \mid A_1 \cup A_2) \\ &= \frac{P[(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2)]}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{p^2}{2p - p^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{p}{2-p}.$$

EXEMPLO 6

Certo artigo, ao sair da linha de produção pode ter no máximo dois defeitos, A e B. Os defeitos ocorrem independentemente um do outro com probabilidade 1/10, cada um. Se um artigo é extraído ao acaso da linha de produção, qual a probabilidade de :

- (a) ser defeituoso
- (b) ter o defeito A, se é defeituoso
- (c) ser perfeito .

Sejam os eventos : A : “o artigo tem defeito A”
 B : “o artigo tem defeito B”
 D : “o artigo é defeituoso”.

(a) $P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 1/10 + 1/10 - 1/100 = 19/100.$

(b) $P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(D)} = \frac{P(A)}{P(D)} = \frac{1/10}{19/100} = \frac{10}{19}.$

(c) $P(\text{ser perfeito}) = P(D') = 1 - P(D) = 1 - 19/100 = 81/100.$

EXEMPLO 7

Três componentes C_1 , C_2 e C_3 de um mecanismo são postos em série. Suponha que esses componentes sejam dispostos em ordem aleatória. Seja R o evento “ C_2 está a direita de C_1 ”, e seja S o evento “ C_3 está à direita de C_1 ”. Os eventos R e S são independentes ? Por quê ?

O espaço amostral é :

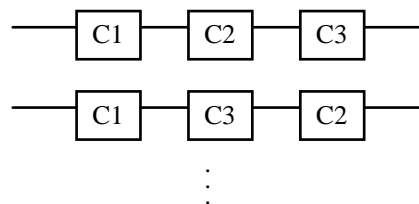
$S = \{ C_1C_2C_3 , C_1C_3C_2 , C_2C_1C_3 , C_2C_3C_1 , C_3C_1C_2 , C_3C_2C_1 \}$

Os eventos R e S são :

$R = \{ C_1C_2C_3 , C_3C_1C_2 , C_1C_3C_2 \}$

$S = \{ C_1C_2C_3 , C_2C_1C_3 , C_1C_3C_2 \}$

$R \cap S = \{ C_1C_2C_3 , C_1C_3C_2 \}$



$P(R) = 3/6 = 1/2 \quad P(S) = 3/6 = 1/2 \quad P(R \cap S) = 2/6 = 1/3.$

Mas $P(R) \cdot P(S) = (1/2) (1/2) = 1/4 \neq P(R \cap S) = 1/3$.

Logo R e S não são independentes.

EXEMPLO 8

Uma montagem eletrônica é formada de dois subsistemas A e B. De procedimentos de ensaios anteriores, as seguintes probabilidades se admitem conhecidas :

$$P(A \text{ falhe }) = 0,20$$

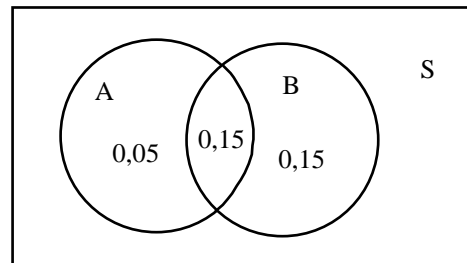
$$P(A \text{ e } B \text{ falhe }) = 0,15$$

$$P(B \text{ falhe sozinho }) = 0,15$$

Qual a probabilidade de que :

(a) A falhe dado que B tenha falhado

(b) A falhe sozinho.



Sejam os eventos : A : “A falha” e B : “B falha”.

$$\text{Então : } P(A) = 0,20 \quad P(B) = 0,30 \quad P(A \cap B) = 0,15.$$

$$P(B) = P[(A \cap B) \cup (A' \cap B)] = P(A \cap B) + P(A' \cap B) = 0,15 + 0,15 = 0,30.$$

$$(a) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,15}{0,30} = 0,50 .$$

$$(b) P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0,20 - 0,15 = 0,05 .$$

EXEMPLO 9

Uma urna contém 12 bolas brancas, 5 bolas pretas e 3 bolas vermelhas.

(a) Retiramos 2 bolas com reposição da primeira, qual a probabilidade de que ambas sejam da mesma cor ?

(b) Se retirarmos 5 bolas sucessivamente, sem reposição , qual a probabilidade de que todas sejam brancas ?

Sejam os eventos : A_i : “a i-ésima bola retirada é branca”

B_i : “a i-ésima bola retirada é preta”

C_i : “a i-ésima bola retirada é vermelha”

(a) Seja o evento D : “ ambas as bolas são da mesma cor ”.

$$\begin{aligned} P(D) &= P[(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap C_2)] = \\ &= (A_1 \cap A_2) + (B_1 \cap B_2) + (C_1 \cap C_2) = \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(B_1)P(B_2) + P(C_1)P(C_2) = \\ &= (12/20)(12/20) + (5/20)(5/20) + (3/20)(3/20) = 89/200 . \end{aligned}$$

(b) Seja o evento E : “ todas as cinco bolas são brancas ”.

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \\ &= P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) P(A_5 | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= (12/20) (11/19) (10/18) (9/17) (8/16) = 33/646 . \end{aligned}$$

EXEMPLO 10

Dois jogadores jogam alternadamente uma moeda, ganhando o jogo aquele que obtiver a primeira cara. Qual a probabilidade de ganho do primeiro a jogar ? E do segundo ?

Sejam os eventos : A : “o primeiro a jogar ganha o jogo”
 B : “o segundo a jogar ganha o jogo”.

O espaço amostral é : S : { A , B }

O evento poderá ocorrer na primeira jogada ou na terceira (a segunda é do adversário), desde que ambos errem as anteriores, ou na quinta, etc. A probabilidade de acerto na primeira é 1/2, de acerto na terceira jogada é 1/8, etc. Logo :

$$P(A) = 1/2 + 1/8 + 1/32 + \dots = \frac{1/2}{1 - 1/4} = \frac{2}{3} .$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - 2/3 = 1/3 .$$

1.3.6 DIAGRAMA DE ÁRVORE

Se um resultado pode ser obtido de n_1 maneiras diferentes e se, após isso, um segundo resultado pode ser obtido de n_2 maneiras diferentes, etc ... , e finalmente se um k-ésimo resultado pode ser obtido de n_k maneiras diferentes, então todos os k resultados podem ser obtidos, na ordem especificada, de $n_1 n_2 \dots n_k$ maneiras diferentes. Neste tipo de experimentos utiliza-se um diagrama de árvore.

EXEMPLO

São dadas três caixas, como segue :

a caixa I contém 10 lâmpadas, das quais 4 são defeituosas ;

a caixa II contém 6 lâmpadas, das quais 1 é defeituosa ;

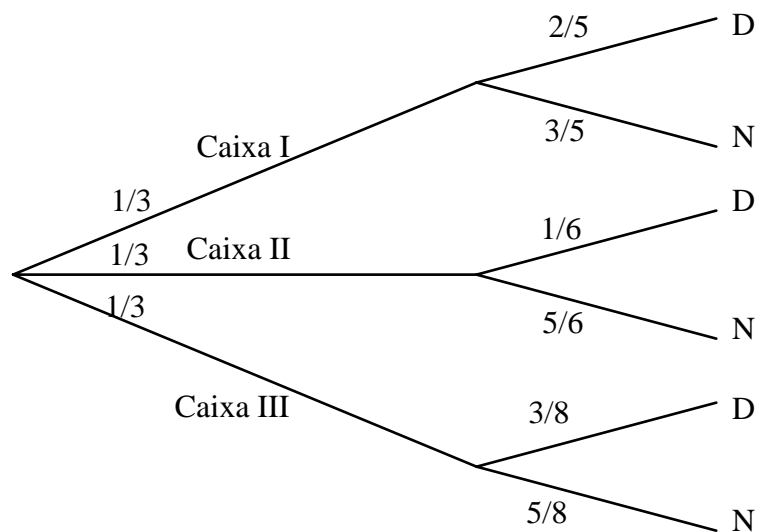
a caixa III contém 8 lâmpadas, das quais 3 são defeituosas.

Selecionamos uma caixa aleatoriamente e então retiramos uma lâmpada, também aleatoriamente. Qual é a probabilidade da lâmpada ser defeituosa ?

Note que realizamos o experimento numa seqüência de 2 etapas:

- (i) selecionamos uma das três caixas.
- (ii) da caixa selecionada, retiramos ao acaso uma lâmpada que pode ser defeituosa (D) ou não defeituosa (N).

O seguinte diagrama em árvore descreve então este processo e dá a probabilidade de cada ramo .



Observe que para cada ramificação a soma das probabilidades é sempre igual a 1.

A probabilidade de ocorrer um determinado caminho da árvore é, pelo Teorema do Produto , o produto das probabilidades de cada ramo do caminho. Por exemplo : a probabilidade de selecionar a caixa 1 e , na seqüência , uma lâmpada defeituosa é : $(1/3) (2/5) = 2/15$.

Como há três caminhos mutuamente exclusivos que nos levam a uma lâmpada defeituosa, a soma das probabilidades destes caminhos nos dá a probabilidade desejada :

$$P = (1/3) (2/5) + (1/3) (1/6) + (1/3) (3/8) = 113/360.$$

O seguinte teorema vem formalizar esta idéia .

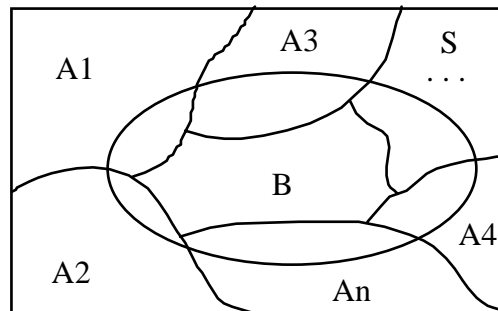
1.3.7 TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Suponha que os eventos A_1, A_2, \dots, A_n constituem uma partição de um espaço amostral S , ou seja, os eventos A_i são mutuamente exclusivos e sua união é S .

Se B é um outro evento qualquer de S , então :

$$P(B) = P(A_1) P(B | A_1) + P(A_2) P(B | A_2) + \dots + P(A_n) P(B | A_n).$$

De fato : Considere o diagrama de Venn :



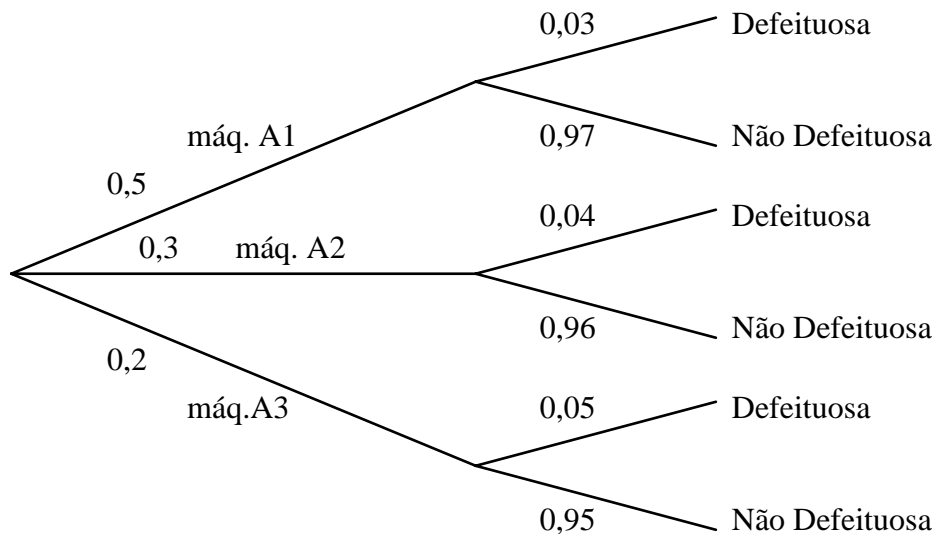
$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \text{ e}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)] = \\ &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = \\ &= P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \dots + P(A_n)P(B | A_n) . \end{aligned}$$

EXEMPLO

Três máquinas A_1 , A_2 e A_3 , produzem respectivamente 50%, 30% e 20% do total de peças de uma fábrica. As porcentagens de produção defeituosa destas máquinas são 3%, 4% e 5%. Se uma peça é selecionada aleatoriamente, qual a probabilidade dela ser defeituosa?

Sejam os eventos : A_1 : “a peça é fabricada pela máquina A_1 ”
 A_2 : “a peça é fabricada pela máquina A_2 ”
 A_3 : “a peça é fabricada pela máquina A_3 ”
 B : “a peça é defeituosa”.



$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) P(B | A_1) + P(A_2) P(B | A_2) + P(A_3) P(B | A_3) = \\ &= (0,5) (0,03) + (0,3) (0,04) + (0,2) (0,05) = 0,037. \end{aligned}$$

Suponha agora, que a peça selecionada é defeituosa. Qual a probabilidade dela ter sido produzida pela máquina A_1 ?

O seguinte teorema responde esta pergunta.

1.3.8 TEOREMA DE BAYES

Se os eventos A_1, A_2, \dots, A_n constituem uma partição do espaço amostral S , onde $P(A_i) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$, então para qualquer evento B de S tal que $P(B) \neq 0$:

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B | A_k)}{P(B)}$$

De fato: Usando o teorema do produto e o teorema da probabilidade total, temos:

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) \cdot P(B | A_k)}{\sum_{i=1}^k P(A_i) \cdot P(B | A_i)}$$

EXEMPLO

No exemplo anterior, se a peça é defeituosa, a probabilidade dela ter sido fabricada pela máquina A_1 é dada por:

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1) P(B | A_1)}{P(B)} = \frac{(0,5) (0,03)}{0,037} = 0,405.$$

OBSERVAÇÃO:

Note que o Teorema de Bayes utiliza essencialmente alguma informação a respeito do resultado do experimento. No exemplo das máquinas, sabendo-se que a peça é defeituosa (esta é a informação) a probabilidade dela ser fabricada pela máquina A_1 ficou alterada.

Ainda sobre a aplicação do Teorema da Probabilidade Total e do Teorema de Bayes alguns exemplos são apresentados :

EXEMPLO 1

Suponha que temos duas urnas I e II, cada com duas gavetas. A urna I contém uma moeda de ouro em uma gaveta e uma moeda de prata na outra gaveta. A urna II contém uma moeda de ouro em cada gaveta. Uma urna é escolhida ao acaso e a seguir uma de suas gavetas é aberta ao acaso.

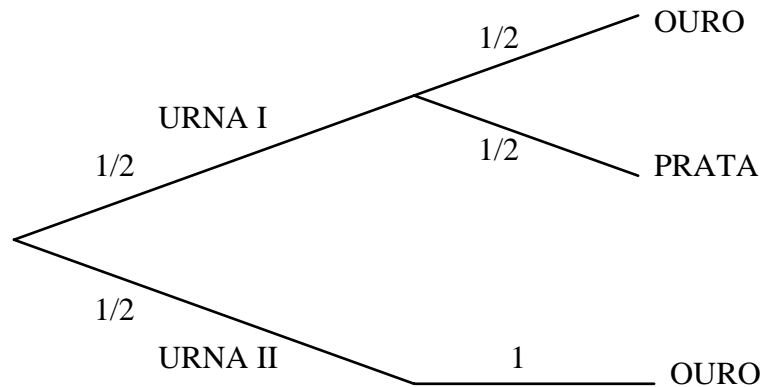
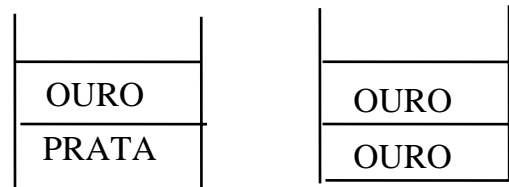
- (a) Qual a probabilidade da moeda ser de ouro ?
- (b) Verifica-se que a moeda encontrada é de ouro. Qual a probabilidade de que a moeda provenha da urna II ?

Sejam os eventos :

A_1 : “a urna I é escolhida”

A_2 : “a urna II é escolhida”

O : “a moeda é de ouro”



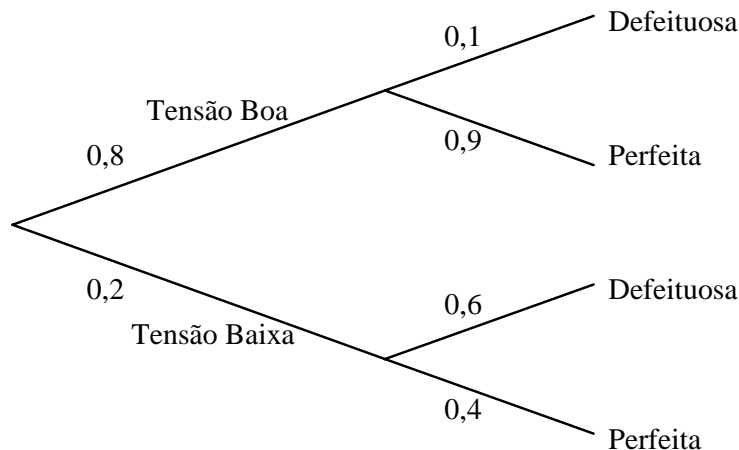
(a) $P(O) = P(A_1) P(O | A_1) + P(A_2) P(O | A_2) = (1/2) (1/2) + (1/2) (1) = 3/4 .$

(b) $P(A_2 | O) = \frac{P(A_2) P(O | A_2)}{P(O)} = \frac{(1/2) (1)}{3/4} = 2/3 .$

EXEMPLO 2

Se a tensão é baixa, a probabilidade de uma máquina produzir peça defeituosa é 0,6 e se a tensão é boa, a probabilidade é 0,1. Em 20 % da produção a tensão é baixa. Qual a probabilidade de uma peça perfeita ter sido produzida com baixa tensão ?

Sejam os eventos : A_1 : “a tensão é boa”
 A_2 : “a tensão é baixa”
 B : “a peça é perfeita”.



Primeiro vamos calcular a probabilidade de uma peça qualquer ser perfeita :

$$P(B) = P(A_1) P(B | A_1) + P(A_2) P(B | A_2) = (0,8) (0,9) + (0,2)(0,4) = 0,8.$$

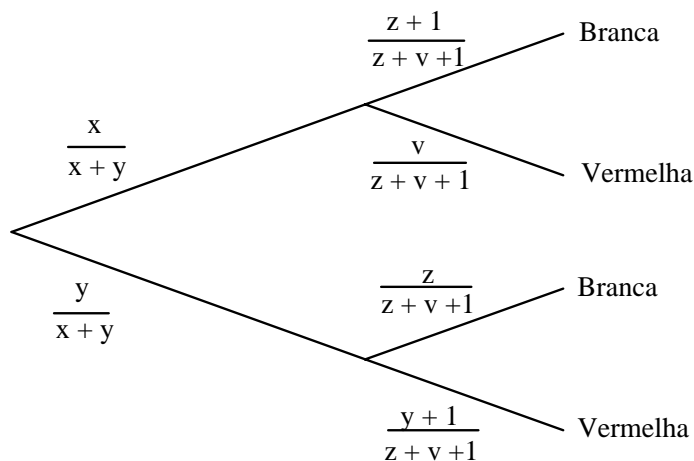
Daí, pelo Teorema de Bayes :

$$P(A_2 | B) = \frac{P(A_2) P(B | A_2)}{P(B)} = \frac{(0,2) (0,4)}{0,8} = 0,1 .$$

EXEMPLO 3

A urna I contém x bolas brancas e y bolas vermelhas. A urna II contém z bolas brancas e v bolas vermelhas. Uma bola é escolhida ao acaso da urna I e posta na urna II. A seguir, uma bola é retirada ao acaso da urna II.

- (a) Qual será a probabilidade de que esta bola seja branca ?
 (b) Se a bola retirada da urna II é branca, qual é a probabilidade dela ter vindo da urna I ?



$$(a) \quad P(\text{branca}) = \binom{x}{x+y} \binom{z+1}{z+v+1} + \binom{y}{x+y} \binom{z}{z+v+1}$$

$$(b) \quad P(\text{urna I} \mid \text{branca}) = \frac{\binom{x}{x+y} \binom{z+1}{z+v+1}}{\binom{x}{x+y} \binom{z+1}{z+v+1} + \binom{y}{x+y} \binom{z}{z+v+1}}$$

EXEMPLO 4

Uma cápsula espacial aproxima-se da Terra com dois defeitos: nos seus circuitos elétricos e no sistema de foguetes propulsores. O comandante considera que, até o instante do reingresso na atmosfera, existe 20 % de probabilidade de reparar os circuitos elétricos e 50 % de probabilidade de reparar o sistema de foguetes. Os reparos se processam independentemente. Por outro lado, os especialistas em Terra consideram que as probabilidades de êxito no retorno são as seguintes :

- a) 90 %, com os circuitos elétricos e o sistema de foguetes reparados.
- b) 80 %, só com o sistema de foguetes reparado.
- c) 60 %, só com os circuitos elétricos reparados.
- d) 40 %, com os circuitos elétricos e o sistema de foguetes defeituosos.

Com base nas considerações acima, qual é a probabilidade de êxito no retorno? Se o retorno se processar com êxito, qual é a probabilidade de que tenha se realizado nas condições mais adversas (ambos os sistemas não reparados) ?

Sejam os eventos :

A_1 : “só os circuitos elétricos são reparados”

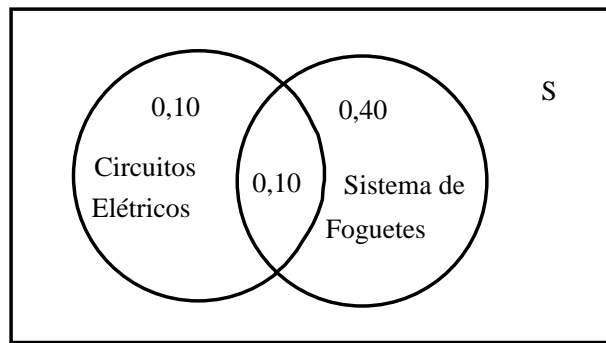
A_2 : “só o sistema de foguetes é reparado”

A_3 : “os circuitos elétricos e o sistema de foguetes são reparados”

A_4 : “nenhum reparo , os circuitos elétricos e o sistema de foguetes continuam defeituosos” .

E : “retorno com êxito”.

Note que os eventos A_1 , A_2 , A_3 , A_4 constituem uma partição do espaço amostral.



$$P(A_3) = (0,20)(0,50) = 0,10 \quad (\text{por independência})$$

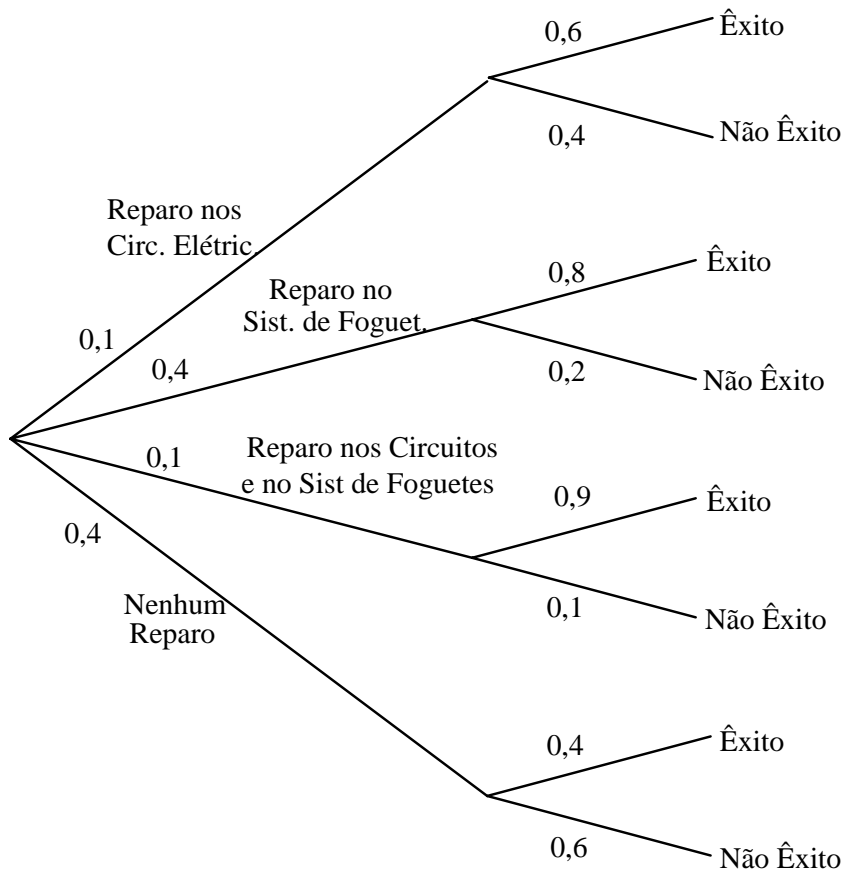
$$P(A_1) = 0,20 - 0,10 = 0,10$$

$$P(A_2) = 0,50 - 0,10 = 0,40$$

$$P(A_4) = 1 - (0,10 + 0,10 + 0,40) = 0,40$$

$$P(E | A_1) = 0,60 \quad P(E | A_2) = 0,80 \quad P(E | A_3) = 0,90 \quad P(E | A_4) = 0,40$$

O seguinte diagrama de árvore resume os eventos e suas probabilidades envolvidas neste experimento aleatório :



P(retorno com êxito) =

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1)P(E | A_1) + P(A_2) P(E | A_2) + P(A_3) P(E | A_3) + P(A_4) P(E | A_4) \\ &= (0,1) (0,6) + (0,4) (0,8) + (0,1) (0,9) + (0,4) (0,4) = 0,63. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{nenhum reparo} | \text{retorno com êxito}) &= P(A_4 | E) = \frac{P(A_4) P(E | A_4)}{P(E)} = \\ &= \frac{(0,40) (0,40)}{0,63} = 0,254 . \end{aligned}$$